一种类型的函数积分

第一机械工业部建筑机械研究所革命委员会

(2). 把 $f(x)=\dfrac{1}{Z(x)}$ 对 $Z(x)$ 展开成幂级数

设. $f(x)=\dfrac{1}{Z(x)}$. $0<b\le Z(x)\le a$ (或 $a<0$)

$$f(x)=\frac{1}{Z(x)-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}}=\frac{2}{2Z(x)-(a+b)+(a+b)}$$

$$=\frac{\frac{2}{a+b}}{\frac{2Z(x)-(a+b)}{a+b}+1}$$

令: $\dfrac{2Z(x)-(a+b)}{a+b}=-\cancel{\alpha}t$

∵ $b\le Z(x)\le a$

$$\frac{2b-(a+b)}{a+b}\le\frac{2Z(x)-(a+b)}{a+b}\le\frac{2a-(a+b)}{a+b}$$

$$-\frac{a-b}{a+b}\le\frac{2Z(x)-(a+b)}{a+b}\le\frac{a-b}{a+b}$$

∵ $a\ne b$. $b\ne0$. ∴ $\dfrac{a-b}{a+b}<1$.

$$|t|\,\cancel{|x|}=\left|\frac{2Z(x)-(a+b)}{a+b}\right|<1.$$

$$f(x)=\frac{\frac{2}{a+b}}{1-t}=\frac{d}{dt}\int\frac{2}{a+b}\cdot\frac{1}{1-t}\,dt\cancel{=\frac{d}{dt}\int\frac{-2}{a+b}}$$

$$\cancel{=-\frac{2}{a+b}\frac{d}{dt}\ln(1-t)=-\frac{2}{a+b}\frac{d}{dt}\left[-\left(t+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}\cdots\right)\right]}$$

$$\cancel{=\frac{2}{a+b}\left(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots\right)}$$

$$f(x) = -\frac{2}{a+b}\frac{d}{dt}\ln(1-t) = -\frac{2}{a+b}\frac{d}{dt}\left[-\left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{t^n}{n}+\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{2}{a+b}\left(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}+\cdots\right)$$

其中 $t = 1-\dfrac{2Z(x)}{a+b}$.

当 $$f(x) = \frac{\varphi(x)}{Z(x)} = \frac{2\varphi(x)}{a+b}\left\{1+\left[1-\frac{2Z(x)}{a+b}\right]+\left[1-\frac{2Z(x)}{a+b}\right]^2 + \cdots + \left[1-\frac{2Z(x)}{a+b}\right]^n + \cdots\right\}$$

这是一个等比级数

其中 $a_1 = \dfrac{2\varphi(x)}{a+b}$ $\quad q = 1-\dfrac{2Z(x)}{a+b}$

$\because$ $0 < Z(x) \le a$ $\quad b \ne 0.$ $\quad \therefore 0 < \dfrac{Z(x)}{a+b} < 1$.

$0 < \dfrac{2Z(x)}{a+b} < 2$ $\quad -1 < \dfrac{2Z(x)}{a+b} - 1 < 1$

即 $|q| = \left|\dfrac{2Z(x)}{a+b} - 1\right| < 1$.

$$S_N = \frac{a_1(1-q^N)}{1-q} \qquad S = \frac{a_1}{1-q}.$$

当 $$S_p = S - S_N = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 - a_1 q^N}{1-q} = \frac{a_1 q^N}{1-q}.$$

$$\Delta = \frac{S_p}{S} = \frac{\dfrac{a_1 q^n}{1-q}}{\dfrac{a_1}{1-q}} = q^N = \left[1-\frac{2Z(x)}{a+b}\right]^N$$

$$\Delta'_{Z(x)} = n\left[1-\frac{2Z(x)}{a+b}\right]^{N-1}\left(-\frac{2}{a+b}\right)$$

$\therefore$ Δ 在 $Z(x)$ 取端点值时有最大值 记作 Δ_{max}.

对 $f(x)$ 积分，用前n项和 S_n 代替S后，积分产生的相对误差，记作 σ.

$$\sigma = \frac{\int S\,dx - \int S_n\,dx}{\int S\,dx} = \frac{\int (S - S_n)\,dx}{\int S\,dx}$$

$$= \frac{\int S_p\,dx}{\int S\,dx} = \frac{\int \frac{S_p}{S}\cdot S\,dx}{\int S\,dx} = \frac{\int \Delta\cdot S\,dx}{\int S\,dx}$$

$$\leq \frac{\int \Delta_{max}\cdot S\,dx}{\int S\,dx} = \frac{\Delta_{max}\int S\,dx}{\int S\,dx} = \Delta_{max}.$$

$\therefore\ \sigma \leq \Delta_{max}.$

为减小积分后的相对误差，应取N为奇数，使在整个积分区域内的积分误差可以部分抵消.

$$\Delta_{max} = \left[1 - \frac{2b}{a+b}\right]^N = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^N.$$

显然，改变N及 $\frac{a-b}{a+b}$ 可以影响⋯

确定的情况下，可以确定N或 $\frac{a-b}{a+b}$，当N过大，将使积分增加困难，这样，在首先确定N的情况下，将积分区域分段积分，使 $\frac{a_1-b}{a_1+b}$，满足误差要求

$$\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1},\ \frac{a_3-a_2}{a_3+a_2},\ \cdots \frac{a_i-a_{i-1}}{a_i+a_{i-1}}$$